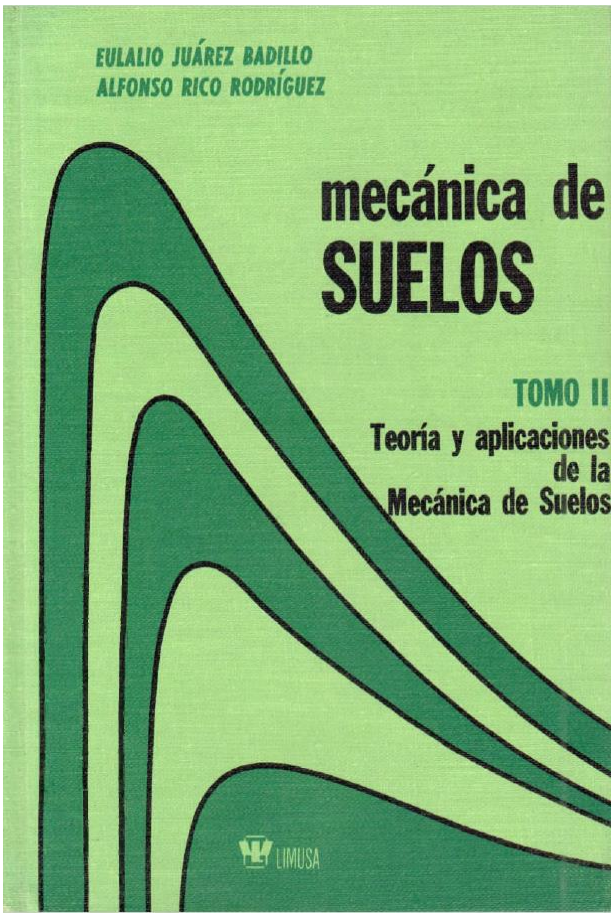
EULALIO JUÁREZ BADILLO
ALFONSO RICO RODRÍGUEZ

mecánica de SUELOS

TOMO II

Teoría y aplicaciones de la Mecánica de Suelos



LIMUSA

Un caso de condición de carga aún más interesante en la práctica que el anterior es el que corresponde a la fig. II-3, en la que se analiza la influencia en la masa del contínuo homogéneo, elástico e isótropo de una superficie rectangular uniformemente cargada, con w unidades de carga por unidad de área.

El esfuerzo σ_z bajo una esquina de la superficie cargada y a una profundidad z, puede obtenerse por integración de la ec. 2-1 en toda el área rectangular, obteniéndose la expresión

$$\sigma_z = \frac{w}{4\pi}\left(\frac{2xyz(x^2+y^2+z^2)^{1/2}}{z^2(x^2+y^2+z^2)+x^2y^2}\cdot\frac{x^2+y^2+2z^2}{x^2+y^2+z^2}+\right.$$

$$\left.+\operatorname{ang\ tg}\frac{2xyz(x^2+y^2+z^2)^{1/2}}{z^2(x^2+y^2+z^2)-x^2y^2}\right) \qquad (2\text{-}12)$$

Adoptando los parámetros m y n, tales que $m=\frac{x}{z}$ y $n=\frac{y}{z}$, (ahora intercambiables), la ec. 2-12 puede escribirse adimensionalmente como

$$\frac{\sigma_z}{w} = \frac{1}{4\pi}\left(\frac{2\,m\,n(m^2+n^2+1)^{1/2}}{(m^2+n^2+1)+m^2n^2}\cdot\frac{m^2+n^2+2}{m^2+n^2+1}+\right.$$

$$\left.+\operatorname{ang\ tg}\frac{2\,m\,n(m^2+n^2+1)^{1/2}}{(m^2+n^2+1)-m^2n^2}\right) \qquad (2\text{-}13)$$

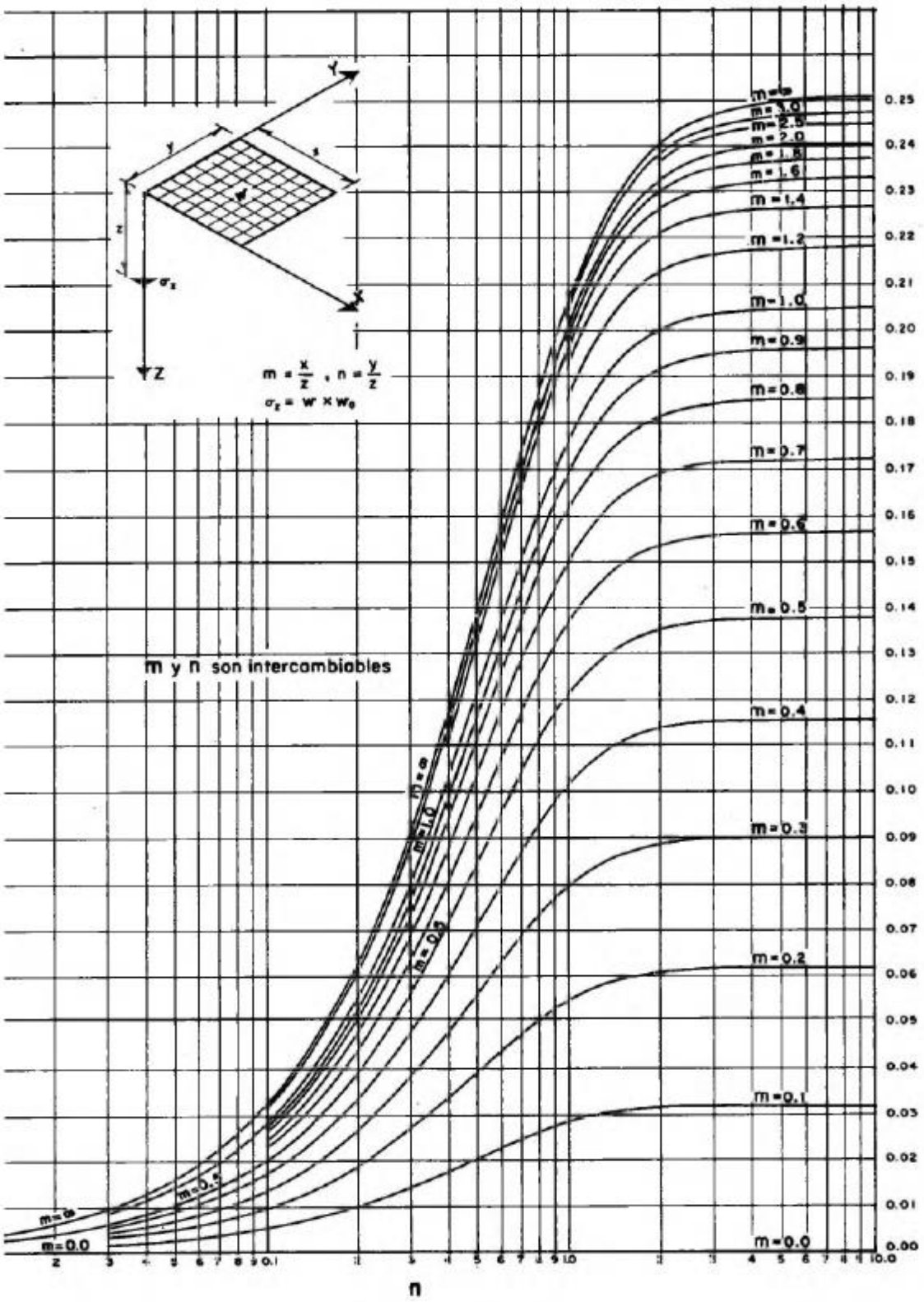
Si al segundo miembro de esta ecuación se le llama w_o, puede tabularse su valor en función de distintos m y n. Esta labor fue también realizada por Fadum[2] y en el Anexo II-d se muestra una gráfica con los resultados de la tabulación.

Para encontrar el valor de σ_z en un punto A bajo una esquina de la superficie rectangular uniformemente cargada se procede a calcular las distancias x y y (fig. II-3), con las que pueden obtenerse los valores de m y n para diferentes profundidades z a lo largo de la vertical. Con la gráfica del Anexo II-d puede calcularse ahora w_o y aplicar la ecuación

$$\sigma_z = w \cdot w_o \qquad (2\text{-}14)$$

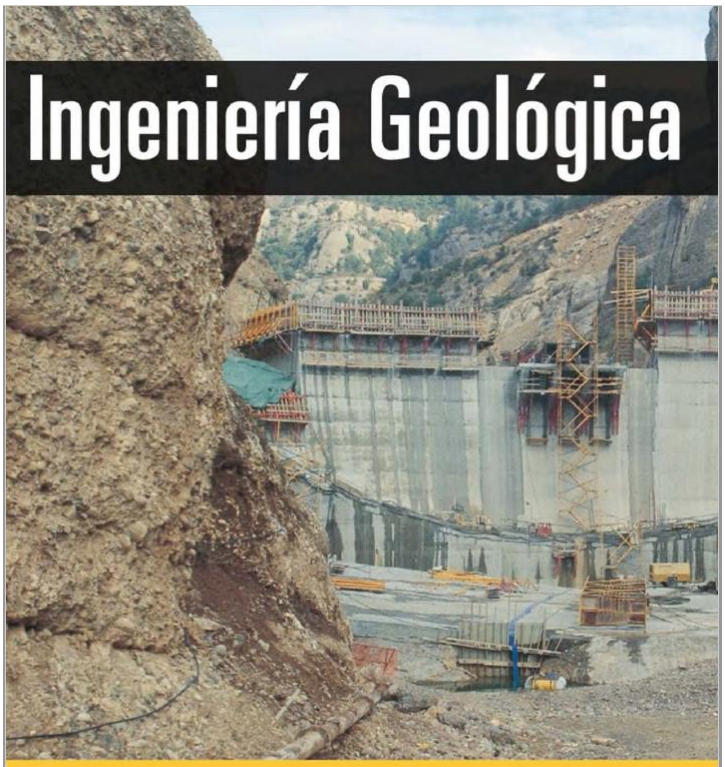
Así se tiene el valor de σ_z, correspondiente a cada profundidad z.

Debe notarse que el sistema coordenado base respecto al cual se calculó el gráfico del Anexo II-d es tal que su origen coincide precisamente con la esquina del área rectangular uniformemente cargada. Si se desean calcular los esfuerzos bajo otro punto, tal como el A' de la fig. II-3, podrá procederse haciendo substracciones y adiciones convenientes al área cargada. Por ejemplo, en el caso del punto A', podría calcularse el σ_z'' correspondiente al área hipotética $BO'FD$; después los σ_z''' y σ_z^{IV} substractivos correspondientes a las áreas $BO'HO$ y $CO'FE$, debiendo notarse que al hacer estas subs-



ANEXO II – d. AREA RECTANGULAR UNIFORMEMENTE CARGADA. (CASO DE BOUSSINESQ).

Ingeniería Geológica



PEARSON Prentice Hall

Coordinador:
Luis I. González de Vallejo

ciente para estimar los asientos del terreno. Para ello es necesario conocer también cómo se distribuyen las presiones transmitidas por las cimentaciones dentro del terreno, en profundidad. Se ha mostrado que la influencia de una carga no infinitamente extensa se encuentra limitada a una cierta zona de influencia en sus proximidades. Por ello resulta muy interesante analizar cómo se distribuyen en el terreno las tensiones originadas por cargas de extensión limitada.

En la mayoría de los tratados de geotecnia se recogen soluciones a este problema, siempre basadas en teorías elásticas, que proporcionan órdenes de magnitud razonables para la estimación de los incrementos de tensión vertical originados por una cimentación. En los párrafos siguientes se incluyen algunas soluciones habituales a emplear en casos prácticos. Un mayor número de situaciones resueltas puede encontrarse en Jimenez Salas y otros (1976) y en Poulos y Davis (1974).

CARGA PUNTUAL SOBRE UN SEMIESPACIO ELÁSTICO

Este fue el problema original estudiado por Boussinesq (Figura 8.13). El resto de las soluciones para semiespacio elástico provienen de la adecuada integración de otras hipótesis de carga más complejas.

La expresión para el incremento de tensión vertical originado por la carga puntual P de la figura resulta:

$$\Delta\sigma_z = \frac{3P}{2\pi}\frac{z^3}{R^5}$$

donde

— z, R: parámetros geométricos que definen la posición del punto o elemento de suelo en donde se calculan las tensiones.

TENSIONES VERTICALES BAJO LA ESQUINA DE UN RECTÁNGULO CARGADO UNIFORMEMENTE

La solución de este problema (Figura 8.14), debida a Newmark, permite obtener el incremento de tensión vertical a una profundidad z bajo la esquina de un rectángulo cargado uniformemente con una carga repartida q.

Llamando:

$$m = L/z$$
$$n = B/z$$

se tiene:

$$\Delta\sigma_z = \frac{q}{4\pi} I_\sigma$$

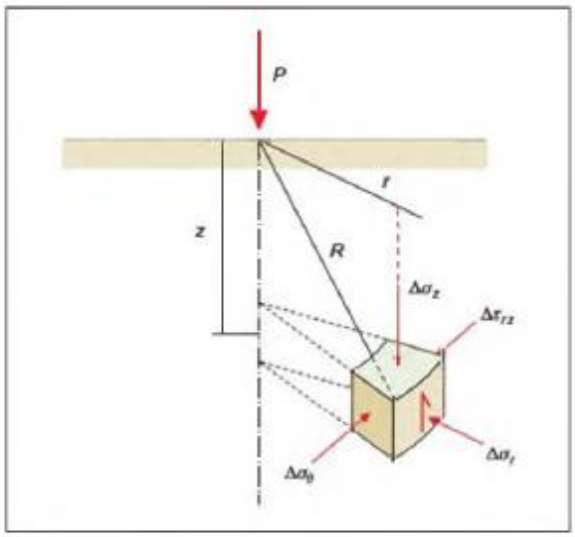


Figura 8.13 Tensiones debidas a una carga puntual en un semiespacio elástico.

donde I_σ es un coeficiente de influencia que puede determinarse a partir de consideraciones geométricas mediante la expresión siguiente:

$$I_\sigma = \frac{2mn(m^2+n^2+2)\sqrt{m^2+n^2+1}}{(m^2+n^2+1+m^2n^2)} \cdot \operatorname{arcsen} \cdot \left[\frac{2mn\sqrt{m^2+n^2+1}}{m^2+n^2+1+m^2n^2}\right]$$

La relativa complejidad de la formulación anterior puede resolverse de manera sencilla mediante el em-

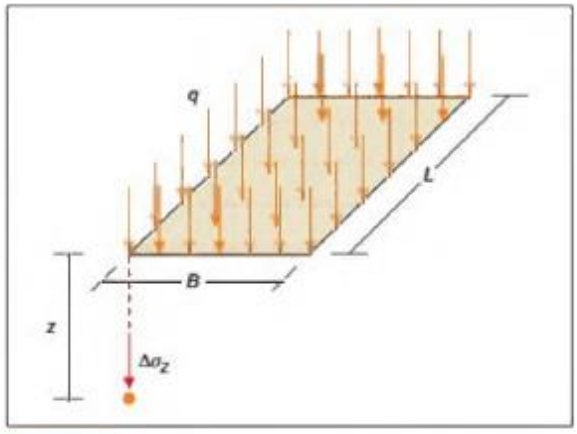


Figura 8.14 Tensiones verticales bajo un rectángulo cargado uniformemente.

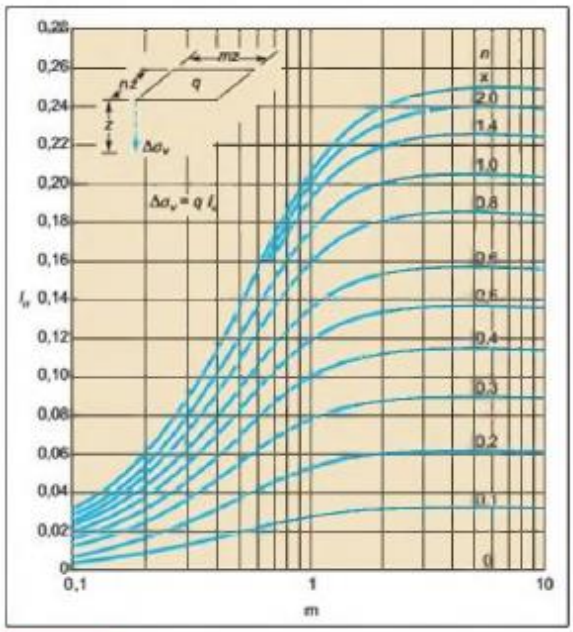


Figura 8.15 Tensión vertical bajo la esquina de un rectángulo uniformemente cargado (Fadum, 1948; en Jiménez Salas y otros, 1976).

pleo de ábacos de entrada directa. En la Figura 8.15 se reproduce el preparado por Fadum, que permite la obtención directa del coeficiente de influencia en función de los parámetros geométricos m y n. Como puede apreciarse, en la expresión de dicho coeficiente se incluye ya el divisor 4π de la fórmula de Newmark.

No cabe duda de que en la mayoría de los casos interesará conocer las tensiones producidas por cargas rectangulares no sólo bajo sus esquinas, sino también en otros puntos del terreno (bajo el centro, un borde, o incluso bajo un punto alejado del área cargada). Para ello se puede hacer uso del principio de superposición de la teoría de la elasticidad, de forma que basta combinar de forma apropiada los incrementos de tensión producidos por una serie de rectángulos debidamente seleccionados. Así, por ejemplo, el incremento de tensión bajo el centro de un rectángulo de lados L y B será la suma de los incrementos de tensión originados bajo las esquinas de 4 subrectángulos de lados $L/2$ y $B/2$.

TENSIONES BAJO UN ÁREA CIRCULAR CARGADA UNIFORMEMENTE

La integración de la ecuación de Boussinesq bajo el centro del área de carga da lugar a la siguiente expresión (Figura 8.16):

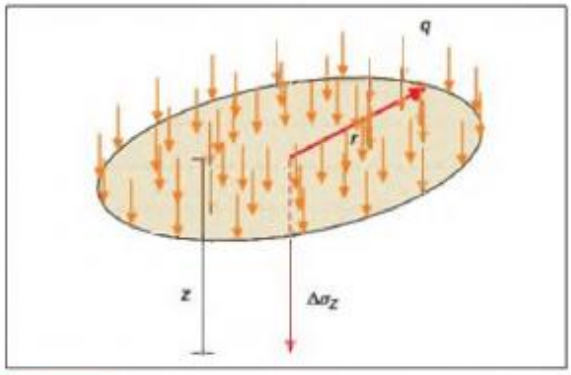


Figura 8.16 Tensiones verticales bajo el centro de un área circular cargada uniformemente.

$$\Delta\sigma_z = q \cdot \left[1 - \left(\frac{1}{1 + \left(\frac{r}{z}\right)^2}\right)^{\frac{3}{2}}\right]$$

Para puntos distintos del centro de área de carga se puede emplear la Figura 8.17, que recoge de forma gráfica los incrementos de tensión vertical originados por una presión de intensidad Δq_z, distribuida uniformemente en superficie sobre un círculo de radio R. El gráfico es adimensional y por simetría tan sólo se representa la mitad del semiespacio, con el eje de ordenadas (profundidades relativas Z/R) coincidiendo con el centro del círculo. En abscisas se representa la distancia relativa al centro del círculo de carga, X/R. Finalmente, los incrementos de tensión vienen dados por una serie de líneas de igual incremento tensional, relativo a la tensión en superficie, $\Delta q_z/\Delta q_z$.

Este gráfico permite visualizar de forma sencilla e intuitiva el concepto apuntado sobre la limitación práctica del efecto de una carga no infinitamente extensa. Así, en la mayoría de las aplicaciones se puede suponer que el límite de interés se circunscribe a puntos del terreno en los que el incremento de tensión vertical es del orden del 10 % de la carga en superficie (para magnitudes habituales de dicha carga). Más allá de esta zona, la sobretensión recibida por el terreno es, en la mayoría de los casos, lo suficientemente pequeña como para que sus efectos sean comparativamente inapreciables.

Si se observa la Figura 8.17 se puede apreciar que la zona definida por el 10 % de la carga en superficie forma un «**bulbo**» que se extiende en profundidad hasta aproximadamente 2 diámetros (o 2 anchos) del área de carga. Esta zona de especial influencia se denomina «**bulbo de tensiones**».

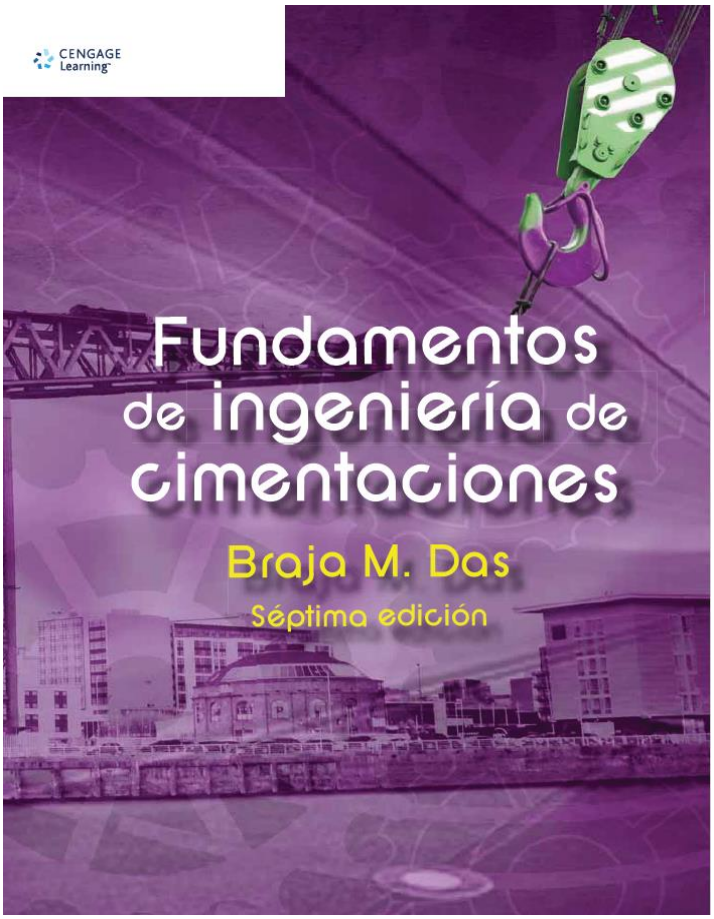

CENGAGE Learning
Fundamentos de ingeniería de cimentaciones
Braja M. Das
Séptima edición

Tabla 5.1 Variación de $\Delta\sigma/q_o$ para un área circular flexible cargada uniformemente.

	$r/(B/2)$					
$z/(B/2)$	0	0.2	0.4	0.6	0.8	1.0
0	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000
0.1	0.999	0.999	0.998	0.996	0.976	0.484
0.2	0.992	0.991	0.987	0.970	0.890	0.468
0.3	0.976	0.973	0.963	0.922	0.793	0.451
0.4	0.949	0.943	0.920	0.860	0.712	0.435
0.5	0.911	0.902	0.869	0.796	0.646	0.417
0.6	0.864	0.852	0.814	0.732	0.591	0.400
0.7	0.811	0.798	0.756	0.674	0.545	0.367
0.8	0.756	0.743	0.699	0.619	0.504	0.366
0.9	0.701	0.688	0.644	0.570	0.467	0.348
1.0	0.646	0.633	0.591	0.525	0.434	0.332
1.2	0.546	0.535	0.501	0.447	0.377	0.300
1.5	0.424	0.416	0.392	0.355	0.308	0.256
2.0	0.286	0.286	0.268	0.248	0.224	0.196
2.5	0.200	0.197	0.191	0.180	0.167	0.151
3.0	0.146	0.145	0.141	0.135	0.127	0.118
4.0	0.087	0.086	0.085	0.082	0.080	0.075

5.4 Esfuerzo debajo de un área rectangular

La técnica de integración de la ecuación de Boussinesq también permite que se evalúe el esfuerzo vertical en cualquier punto A debajo de una esquina de un área flexible rectangular cargada. (Consulte la figura 5.3). Para hacer esto, considere un área elemental $dA = dx\,dy$ en el área flexible cargada. Si la carga por área unitaria es q_o, la carga total sobre el área elemental es

$$dP = q_o\,dx\,dy \tag{5.4}$$

Esta carga elemental dP, se puede tratar como una carga puntual. El incremento en el esfuerzo vertical en el punto A causado por dP se puede evaluar utilizando la ecuación (5.1). Sin embargo, observe la necesidad de sustituir $dP = q_o\,dx\,dy$ para P y $x^2 + y^2$ para r^2 en esa ecuación. Por lo tanto,

$$\text{el incremento del esfuerzo en } A \text{ ocasionado por } dP = \frac{3q_o\,(dx\,dy)z^3}{2\pi(x^2 + y^2 + z^2)^{5/2}}$$

El incremento total del esfuerzo $\Delta\sigma$ causado por toda el área cargada en el punto A se puede obtener integrando la ecuación anterior:

$$\Delta\sigma = \int_{y=0}^{L}\int_{x=0}^{B}\frac{3q_o\,(dx\,dy)z^3}{2\pi(x^2 + y^2 + z^2)^{5/2}} = q_o I \tag{5.5}$$

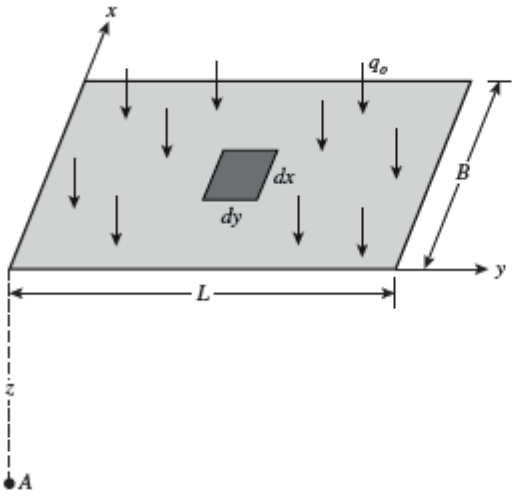


Figura 5.3 Determinación del esfuerzo debajo de una esquina de un área flexible rectangular cargada.

Aquí,

$$I = \text{factor de influencia} = \frac{1}{4\pi}\left(\frac{2mn\sqrt{m^2+n^2+1}}{m^2+n^2+m^2n^2+1}\cdot\frac{m^2+n^2+2}{m^2+n^2+1} + \tan^{-1}\frac{2mn\sqrt{m^2+n^2+1}}{m^2+n^2+1-m^2n^2}\right) \tag{5.6}$$

donde

$$m = \frac{B}{z} = \frac{x}{z} \tag{5.7}$$

y

$$n = \frac{L}{z} = \frac{y}{z} \tag{5.8}$$

Las variaciones de los valores de influencia con m y n se dan en la tabla 5.2.

El incremento del esfuerzo en cualquier punto debajo de un área rectangular cargada también se puede determinar empleando la ecuación (5.5) en conjunto con la figura 5.4. Para determinar el esfuerzo a una profundidad z debajo del punto O, se divide el área cargada en cuatro rectángulos, con O como la esquina común para cada rectángulo. Luego se utiliza la ecuación (5.5) para calcular el incremento en el esfuerzo a una profundidad z debajo de O ocasionado por cada área rectangular. El incremento total del esfuerzo ocasionado por toda el área cargada ahora se puede expresar como

$$\Delta\sigma = q_o\,(I_1 + I_2 + I_3 + I_4) \tag{5.9}$$

donde I_1, I_2, I_3 e I_4 = valores de influencia de los rectángulos 1, 2, 3 y 4, respectivamente.

En la mayoría de los casos, el esfuerzo vertical debajo del centro de un área rectangular es de importancia, y se obtiene mediante la relación siguiente:

$$\Delta\sigma = q_o I_c \tag{5.10}$$

Tabla 5.2 Variación del valor de influencia I [ecuación (5.6)]*

m	n											
	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6	0.7	0.8	0.9	1.0	1.2	1.4
0.1	0.00470	0.00917	0.01323	0.01678	0.01978	0.02223	0.02420	0.02576	0.02698	0.02794	0.02926	0.03007
0.2	0.00917	0.01790	0.02585	0.03280	0.03866	0.04348	0.04735	0.05042	0.05283	0.05471	0.05733	0.05894
0.3	0.01323	0.02585	0.03735	0.04742	0.05593	0.06294	0.06858	0.07308	0.07661	0.07938	0.08323	0.08561
0.4	0.01678	0.03280	0.04742	0.06024	0.07111	0.08009	0.08734	0.09314	0.09770	0.10129	0.10631	0.10941
0.5	0.01978	0.03866	0.05593	0.07111	0.08403	0.09473	0.10340	0.11035	0.11584	0.12018	0.12626	0.13003
0.6	0.02223	0.04348	0.06294	0.08009	0.09473	0.10688	0.11679	0.12474	0.13105	0.13605	0.14309	0.14749
0.7	0.02420	0.04735	0.06858	0.08734	0.10340	0.11679	0.12772	0.13653	0.14356	0.14914	0.15703	0.16199
0.8	0.02576	0.05042	0.07308	0.09314	0.11035	0.12474	0.13653	0.14607	0.15371	0.15978	0.16843	0.17389
0.9	0.02698	0.05283	0.07661	0.09770	0.11584	0.13105	0.14356	0.15371	0.16185	0.16835	0.17766	0.18357
1.0	0.02794	0.05471	0.07938	0.10129	0.12018	0.13605	0.14914	0.15978	0.16835	0.17522	0.18508	0.19139
1.2	0.02926	0.05733	0.08323	0.10631	0.12626	0.14309	0.15703	0.16843	0.17766	0.18508	0.19584	0.20278
1.4	0.03007	0.05894	0.08561	0.10941	0.13003	0.14749	0.16199	0.17389	0.18357	0.19139	0.20278	0.21020
1.6	0.03058	0.05994	0.08709	0.11135	0.13241	0.15028	0.16515	0.17739	0.18737	0.19546	0.20731	0.21510
1.8	0.03090	0.06058	0.08804	0.11260	0.13395	0.15207	0.16720	0.17967	0.18986	0.19814	0.21032	0.21836
2.0	0.03111	0.06100	0.08867	0.11342	0.13496	0.15326	0.16856	0.18119	0.19152	0.19994	0.21235	0.22058
2.5	0.03138	0.06155	0.08948	0.11450	0.13628	0.15483	0.17036	0.18321	0.19375	0.20236	0.21512	0.22364
3.0	0.03150	0.06178	0.08982	0.11495	0.13684	0.15550	0.17113	0.18407	0.19470	0.20341	0.21633	0.22499
4.0	0.03158	0.06194	0.09007	0.11527	0.13724	0.15598	0.17168	0.18469	0.19540	0.20417	0.21722	0.22600
5.0	0.03160	0.06199	0.09014	0.11537	0.13737	0.15612	0.17185	0.18488	0.19561	0.20440	0.21749	0.22632
6.0	0.03161	0.06201	0.09017	0.11541	0.13741	0.15617	0.17191	0.18496	0.19569	0.20449	0.21760	0.22644
8.0	0.03162	0.06202	0.09018	0.11543	0.13744	0.15621	0.17195	0.18500	0.19574	0.20455	0.21767	0.22652
10.0	0.03162	0.06202	0.09019	0.11544	0.13745	0.15622	0.17196	0.18502	0.19576	0.20457	0.21769	0.22654
∞	0.03162	0.06202	0.09019	0.11544	0.13745	0.15623	0.17197	0.18502	0.19577	0.20458	0.21770	0.22656

Tabla 5.2 (*Continuación*)

	n										
m	1.6	1.8	2.0	2.5	3.0	4.0	5.0	6.0	8.0	10.0	∞
0.1	0.03058	0.03090	0.03111	0.03138	0.03150	0.03158	0.03160	0.03161	0.03162	0.03162	0.03162
0.2	0.05994	0.06058	0.06100	0.06155	0.06178	0.06194	0.06199	0.06201	0.06202	0.06202	0.06202
0.3	0.08709	0.08804	0.08867	0.08948	0.08982	0.09007	0.09014	0.09017	0.09018	0.09019	0.09019
0.4	0.11135	0.11260	0.11342	0.11450	0.11495	0.11527	0.11537	0.11541	0.11543	0.11544	0.11544
0.5	0.13241	0.13395	0.13496	0.13628	0.13684	0.13724	0.13737	0.13741	0.13744	0.13745	0.13745
0.6	0.15028	0.15207	0.15326	0.15483	0.15550	0.15598	0.15612	0.15617	0.15621	0.15622	0.15623
0.7	0.16515	0.16720	0.16856	0.17036	0.17113	0.17168	0.17185	0.17191	0.17195	0.17196	0.17197
0.8	0.17739	0.17967	0.18119	0.18321	0.18407	0.18469	0.18488	0.18496	0.18500	0.18502	0.18502
0.9	0.18737	0.18986	0.19152	0.19375	0.19470	0.19540	0.19561	0.19569	0.19574	0.19576	0.19577
1.0	0.19546	0.19814	0.19994	0.20236	0.20341	0.20417	0.20440	0.20449	0.20455	0.20457	0.20458
1.2	0.20731	0.21032	0.21235	0.21512	0.21633	0.21722	0.21749	0.21760	0.21767	0.21769	0.21770
1.4	0.21510	0.21836	0.22058	0.22364	0.22499	0.22600	0.22632	0.22644	0.22652	0.22654	0.22656
1.6	0.22025	0.22372	0.22610	0.22940	0.23088	0.23200	0.23236	0.23249	0.23258	0.23261	0.23263
1.8	0.22372	0.22736	0.22986	0.23334	0.23495	0.23617	0.23656	0.23671	0.23681	0.23684	0.23686
2.0	0.22610	0.22986	0.23247	0.23614	0.23782	0.23912	0.23954	0.23970	0.23981	0.23985	0.23987
2.5	0.22940	0.23334	0.23614	0.24010	0.24196	0.24344	0.24392	0.24412	0.24425	0.24429	0.24432
3.0	0.23088	0.23495	0.23782	0.24196	0.24394	0.24554	0.24608	0.24630	0.24646	0.24650	0.24654
4.0	0.23200	0.23617	0.23912	0.24344	0.24554	0.24729	0.24791	0.24817	0.24836	0.24842	0.24846
5.0	0.23236	0.23656	0.23954	0.24392	0.24608	0.24791	0.24857	0.24885	0.24907	0.24914	0.24919
6.0	0.23249	0.23671	0.23970	0.24412	0.24630	0.24817	0.24885	0.24916	0.24939	0.24946	0.24952
8.0	0.23258	0.23681	0.23981	0.24425	0.24646	0.24836	0.24907	0.24939	0.24964	0.24973	0.24980
10.0	0.23261	0.23684	0.23985	0.24429	0.24650	0.24842	0.24914	0.24946	0.24973	0.24981	0.24989
∞	0.23263	0.23686	0.23987	0.24432	0.24654	0.24846	0.24919	0.24952	0.24980	0.24989	0.25000

[a]Según Newmark, 1935.